Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
не объясняющему нормально электрод
рассказчику баек
и программы каждого курса мехмата и НМУ за 15 мин
стильно одевающимся
и улыбчивому, как Степаньянц
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Семинарист: Слышали мнение mathematician_name? Когомологии, как он считает, должны в школе изучать!

Поподробнее проговорим про квадрупольное слагаемое.
Оно имеет вид

$$\frac{1}{r^5}\cdot\sum_{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}} D_{\alpha\beta}\cdot r_\alpha r_b$$

Где r_α – проекция радиус-вектора в точку наблюдения на ось α.
Так что формулу для потенциала можно переписать как

$$\varphi(r)=\frac{q}{r}+\frac{1}{r^3}(\bar{p}\,\bar{r})+\frac{1}{r^5}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta+\dots$$

Хорошо, а что такое $D_{\alpha\beta}$? Это матрица 3x3. Суммарно-зарядовое слагаемое имело полный заряд q (1 число), дипольное – дипольный момент (3 числа – 3 проекции), $D_{\alpha\beta}$ – это 9 чисел. Как вы догадываетесь, следующее после дипольного слагаемого слагаемое будет иметь хрень с 27 числами.

Однако как и суммарный заряд, как и дипольный момент, квадрупольный момент зависит только от расположения зарядов, а не от точки наблюдения. Мы его посчитаем один раз, после чего сможем легко находить поле для достаточно далёких точек наблюдения, просто считая сумму из 9 слагаемых.

Потренируемся, как его находить. Для начала найдём квадрупольный момент от точечного заряда.
Пусть нам даны координаты точечного заряда q: x, y, z. Мы хотим найти все 9 чисел в этой таблице.
Правило следующее: если нужно найти числа на диагонали (т.е. α=β), то нужно воспользоваться формулой

$$D_{\alpha\alpha}=q(3*r_\alpha*r_\alpha-r^2)$$

Если нужно найти числа не на главной диагонали (т.е. α не равно β), то нужно воспользоваться формулой

$$D_{\alpha\beta}=q(3*r_\alpha*r_\beta)$$

Как нетрудно видеть, $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$, поэтому для нахождения квадрупольного момента достаточно 6 чисел, а не 9.

Эти формулы часто объединяют в одну:

$$D_{\alpha\beta}=q(3*r_\alpha*r_\beta - \delta_{\alpha\beta}*r^2)$$

Где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, равный 1, когда α=β, иначе он равен 0.

Потренируемся. Пусть точечный заряд имеет такие координаты:
x=3, y=4, z=0.
Тогда r=5.
Тогда

$$D_{xx}=q(3*r_x*r_x – r^2)=q(3*3*3-5*5)=q(27-25)=2q$$

$$D_{yy}=q(3*r_y*r_y – r^2)=q(3*4*4-5*5)=q(48-25)=23q$$

$$D_{zz}=q(3*r_z*r_z – r^2)=3*0*0-5*5=-25$$

$$D_{xy}=q(3*r_x*r_y)=q(3*4*5)=60q$$

$$D_{xz}=q(3*r_x*r_z)=q(3*3*0)=0$$

$$D_{yz}=q(3*r_y*r_z)=q(3*4*0)=0$$

Теперь пусть точка наблюдения находится на расстоянии
x=50
y=0
z=120
Не путать со старыми x,y,z – это координаты уже точки наблюдения, а не заряда.
Тогда r=130.
Считаем потенциал:

$$\frac{1}{r^5}\cdot\sum_{\alpha,\beta\in\{x,y,z\}} D_{\alpha\beta}\cdot r_\alpha r_b$$

Должно быть 6 слагаемых, но т.к. две Dшки занулились, будет только 4.

Слагаемое с D_{xx} (которое мы вычислили и оно оказалось 2):

$2*50*50q=5000q$

Слагаемое с D_{yy} (которое мы вычислили и оно оказалось 23): $23*0*0q=0q$

Слагаемое с D_{zz} (которое мы вычислили и оно оказалось -25): $-25*120*120q=-100*3600q=-360000q$

Слагаемое с D_{xy} (которое мы вычислили и оно оказалось -60):

$60*50*120q=3600*120q=-432000q$.

Итого: $q(5000-360000-2*432000)=-1219000q$.

У вас вопрос: откуда взялась двойка перед 432000? Помним, что $D_{xy}= D_{yx}$!

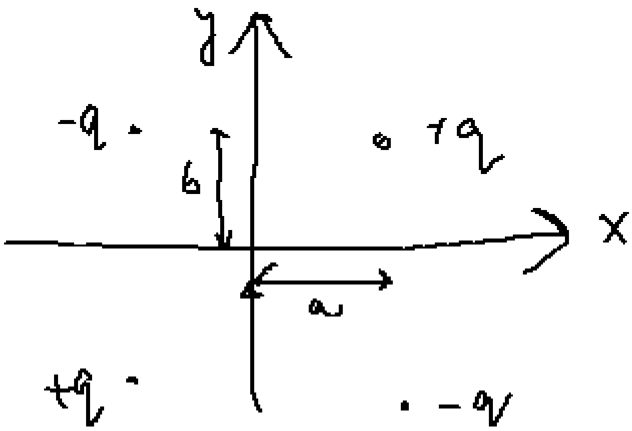
Именно отсюда – нужно просуммировать не только D_{xy}, но и D_{yx}.

На первый взгляд мы получили зашкаливающе много, но мы вспоминаем, что это всё нам надо поделить на r^5 (т.е. 130^5). Ответ: $21,5 * 10^{-6}*q$. Не пугайтесь, что размерность странная, у нас же единицы длины были безразмерными.

Замечание. На семинарах некоторые семинаристы ставят штрихи у координат и радиус-векторов зарядов.
Т.е. пока они считают эту матрицу-дипольный момент, они работают с координатами и радиус-вектором зарядов системы, и именно эти координаты и радиус-вектор они помечают штрихом.
А потом они переходят уже к подсчёту потенциала в точке наблюдения, и тут уже тут координаты – это координаты точки наблюдения, и r – это расстояние до точки наблюдения от центра координат. Тут уже они штрихи не ставят.
Автору очень лень ставить эти штрихи (и в методичке, и на бумаге), вы тоже можете их не ставить, если вы и так различаете, какие у вас когда координаты – заряда или точки наблюдения.

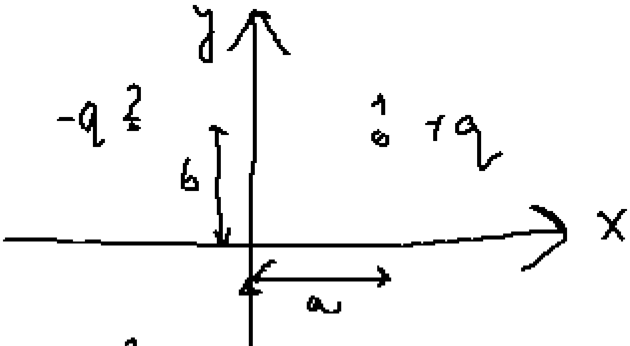
Разумеется, считать квадрупольный момент и через него потенциал, когда вся система состоит из одного заряда – бессмысленно, тут есть закон Кулона, который к тому же даёт точное значение потенциала.

А теперь давайте рассмотрим систему посложнее – вот такой вот квадруполь:



Прямоугольник со сторонами 2a и 2b.
Если мы будем искать потенциал этой системы в достаточно далёкой точке наблюдения, то у нас будет четыре слагаемых с радикалами в знаменателе, причём за счёт того, что из них будет два с плюсом и два с минусом, итоговый результат по модулю будет гораздо меньше, чем модуль каждого из них.

Поэтому разложим потенциал в ряд.
Суммарный заряд – 0, поэтому это слагаемое будет 0.
Дипольный момент – 0. Если вам это неочевидно, предложу такое рассуждение: возьмите левую пару зарядов и правую пару зарядов. Их дипольные моменты будут равны по модулю, но противоположны по направлению. Значит, суммарный дипольный момент будет 0. Итак, и дипольное слагаемое занулится. На первый план выйдет квадрупольное слагаемое.
Пронумеруем для удобства заряды:



$D_{xx\text{ от заряда 1 (далее просто xx1)}}=q(3*r_x*r_x - r^2)=q(3*a*a-r^2)=q(3a^2-r^2)=q(3a^2-a^2-b^2)=q(2a^2-b^2)$

$D_{xx3}=-q(3*r_{x2}*r_{x2} - r^2)=-q(3*(-a)*(-a))- r^2=q(3a^2-r^2) =-q(2a^2-b^2)$

$D_{xx2}=q(3*r_{x3}*r_{x3} - r^2)=q(3*(-a)*(-a))- r^2=q(2a^2-b^2)$

$D_{xx4}=-q(3*r_{x4}*r_{x4} - r^2)=q(3*a*a- r^2)=-q(2a^2-b^2)$

Итого: $D_{xx}=0$.

Аналогично $D_{yy}=0$.

D_{xy} попытаемся подсчитать сразу для всех зарядов, а не искать от каждого из четырёх зарядов:

$D_{xy} =4q(3*r_{x1}*r_{y1}-3*r_{x2}*r_{y2}+3*r_{x3}*r_{y3}-3*r_{x4}*r_{y4})=4q*(3ab-3(-a)b+3(-a)(-b)-3a(-b)=12qab.$

$D_{xy}=D_{yx}=12qab.$

Далее, $D_{zz} =- D_{xx}- D_{yy}=0$

Здесь мы воспользовались тождеством $D_{xx}+D_{yy} +D_{zz}=0$. Как его доказать? Ну, распишем

$D_{xx}= q(2x^2-y^2-z^2)$

$D_{yy}= q(2y^2-x^2-z^2)$

$D_{zz}= q(2z^2-x^2-y^2)$

И видно, что их сумма нулём будет. Это мы доказали для точечного заряда с координатами (x, y, z); для распределённого заряда будет то же самое – мы запишем распределённый заряд как интеграл по объёму от точечных зарядов, после чего применим тот же трюк.

D_{xz} и D_{yz} будут равны 0.

Ура, подсчитали все компоненты!

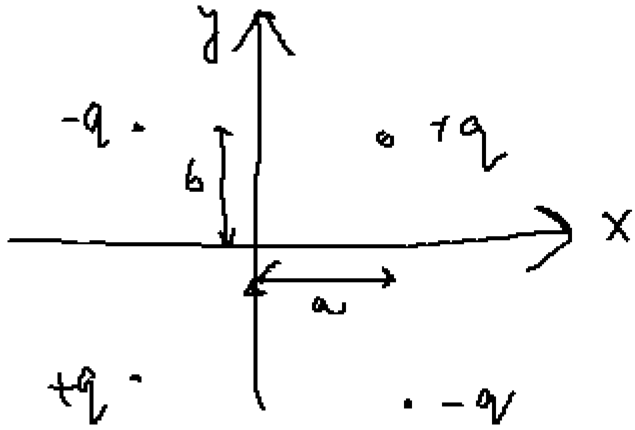
Теперь считаем потенциал:

$$\frac{1}{r^5} \cdot \sum_{\alpha,\beta \in \{x,y,z\}} D_{\alpha\beta} \cdot r_\alpha r_b$$

Ах, мы не указали точку наблюдения… А пусть она будет произвольной с координатами (x, y, z). Тогда вклад в потенциал дадут только

$$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\left(D_{xy}xy + D_{yx}yx\right) = \frac{2D_{xy}xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{24qab\cdot xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Как мы видим, хотя для системы зарядов в вершинах квадрата суммарно-зарядовое и дипольное слагаемое занулились, но квадрупольное отнюдь не ноль.



Именно поэтому такая система называется квадруполем.

Не удержусь и проведу аналогию с тензором инерции. Вы наверняка обратили внимание, что и в первой, и во второй задаче наибольшее значение по модулю было для z-товой компоненты. Это не случайно. В некотором роде $D_{\alpha\alpha}$ – это момент инерции вокруг оси α (в некотором роде, потому что заряды бывают отрицательные, а вот масса – нет). Если у нас всё действие происходит в плоскости OXУ, то максимальный момент инерции будет именно вдоль оси OZ. Также вы наверняка помните, что у любого тела есть три перпендикулярные друг другу оси (они называются главными), относительно которого тензор инерции имеет диагональный вид. Условия диагональности есть и для тензора квадрупольного момента: все заряды должны быть на осях.

Вообще, чтобы смешанная компонента дипольного момента $D_{\alpha\beta}$ была не 0, необходимо, чтобы в плоскости Oαβ был хоть один заряд НЕ на осях α и β. Скажем, в обоих задачах были заряды не на осях x и y, и D_{xy} был не 0. А вот зарядов в плоскости OXZ не на осях не было, и D_{xz} был 0.

Наконец, что делать, если распределение зарядов не точечное, а непрерывное? Очевидно, делать вместо суммы интеграл.
Тогда

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{\text{по всем зарядам } q_i} (3 * r_{\alpha i} * r_{\beta i} - \delta_{\alpha\beta} * r_i^2) \, q_i$$

заменится на интеграл по всему объёму

$$D_{\alpha\beta} = \iiint_{R^3} (3 * r_{\alpha i} * r_{\beta i} - \delta_{\alpha\beta} * r_i^2) \, \rho \, dV$$

Некоторые семинаристы сразу дают конечную формулу с интегралом. Но попытка применить её для точечных зарядов рождает дельта-функции. Это не ошибка, но брать интеграл от дельта-функции достаточно противно и в конечном итоге вы всё равно придёте от интеграла к сумме. Так что если у вас заряды точечные – посылаете интеграл к лешему и используйте сразу сумму! (если только вдруг система не двигается…а если двигается – см. Электрод3!)

Напоследок замечу, что глядя на разложение

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} + \frac{1}{r^3}(\bar{p}\,\bar{r}) + \frac{1}{r^5}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta + \ldots$$

Или, что то же самое

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} + \frac{1}{r^3}\sum_{\alpha} p_\alpha r_\alpha + \frac{1}{r^5}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta + \ldots$$

Хочется сказать, что дипольное слагаемое убывает как $1/r^3$, а квадрупольное – как $1/r^5$. Это не так, т.к. rки есть ещё в самих слагаемых. На самом деле перепишем разложение через направляющие косинусы

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} + \frac{1}{r^2}\sum_{\alpha} p_\alpha \mu_\alpha + \frac{1}{r^3}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta}\mu_\alpha \mu_\beta + \ldots$$

$$\text{где } \mu_\alpha = \cos(\bar{e}_\alpha \hat{,} \bar{r})$$

То увидим правильную асимптотику: дипольное слагаемое убывает как $1/r^2$, а квадрупольное – как $1/r^3$.

Но считать потенциал через направляющие косинусы обычно неудобно, поэтому используют первоначальную запись.